Rechteckoszillator

Aufgabe 1

Das Ausgangssignal u_a wird auf den nichtinvertierenden Eingang des Operationsverstärkers zurückgeführt. Bei der Schaltung (grau unterlegter Bereich!) handelt es sich also um einen Diskriminator und, da das Eingangssignal u_N auf den invertierenden Eingang geführt wird, um einen invertierenden Diskriminator.

Bei den Schwellwerten wechselt die Ausgangsspannung des Operationsverstärkers von U_{B-} auf U_{B+} (Einschalten: Schwellwert $u_{N,ein}$), bzw. umgekehrt von U_{B+} auf U_{B-} (Ausschalten: Schwellwert $u_{N,aus}$). Dies geschieht, weil bei den Schwellwerten die Differenzspannung u_{ed} am Eingang von positiven zu negativen Werten, bzw. umgekehrt von negativen zu positiven Werten wechselt.

Des Weiteren liegt am Komperator bei einer hinreichend grossen positiven Eingangsspannung ein negativer Spannungsunterschied u_{ed} an und somit liegt der Ausgang auf U_{B-} , bei einer hinreichend grossen negativen Eingangsspannung hingegen liegt der Ausgang auf U_{B+}.

Somit ergibt sich qualitativ (die effektiven Schwellwerte $u_{N,ein}$ und $u_{N,aus}$ müssen zuerst noch berechnet werden) folgender Verlauf der Ausgangsspannung u_a in Abhängigeit vom Eingang u_N:

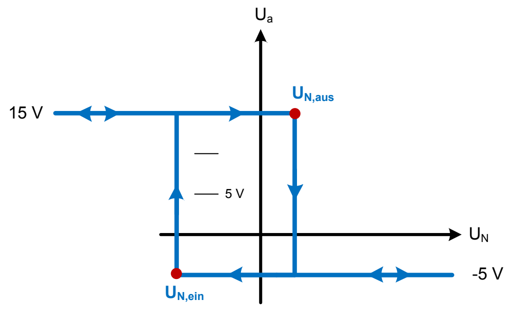

Abb. 1: Qualitative Kennlinie des invertierenden Diskriminators.

Berechnung der Schwellwerte:

Da die Verstärkung des Operationsverstärkers unendlich hoch ist, beträgt u_{ed} bei den Schwellwerten gerade 0V. Mit u_{ed} = 0V und den entsprechenden Ausgangsspannungen $u_a = U_{B+}$, bzw. $u_a = U_{B-}$ lassen sich die Schwellwerte berechnen:

$$U_{N,ein} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} U_{B-} \qquad U_{N,aus} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} U_{B+}$$

Die Schalthysterese ΔU_N ist die Differenz zwischen den beiden Schwellwerten:

$$\Delta U_N = U_{N,aus} - U_{N,ein} = 15\text{V}$$

Damit lässt sich der gesuchte Widerstand R_1 bestimmen:

$$\Delta U_N = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot \left(U_{B+} - U_{B-} \right)$$

$$R_1 = \frac{R_2 \cdot \Delta U_N}{\left(U_{B+} + U_{B-}\right) - \Delta U_N} = 150\text{k}\Omega$$

Mit der Kenntnis von R_1 lassen sich nun die Schwellwerte berechnen, sie betragen 11.25V respektive -3.75V. **Abb. 2** zeigt die Kennlinie $u_a = f(u_N)$ des hier betrachteten invertierenden Diskriminators.

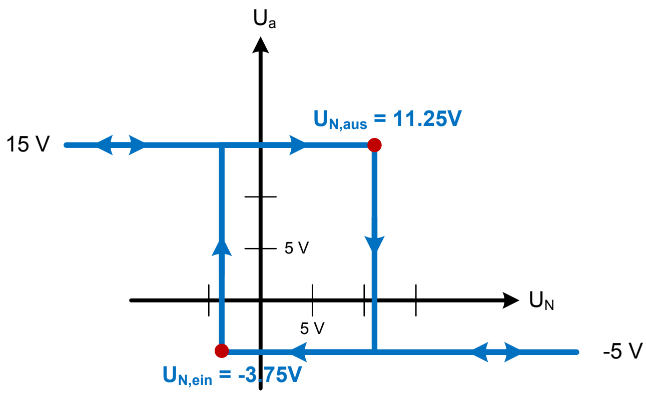

Abb. 2: Kennlinie des invertierenden Diskriminators.

Aufgabe 2

Das Ausgangssignal u_a wird zusätzlich auf den invertierenden Eingang des Operationsverstärkers zurückgeführt. Dabei wird der Kondensator *C*, dessen Spannung der Eingangsspannung u_N entspricht, durch den Strom des zweiten Rückführpfades aufgeladen, bzw. entladen. Der Ladestrom ist dabei abhängig von der Grösse des Widerstandes *R* und von der (nicht konstanten) Spannungsdifferenz u_a - u_N über dem Widerstand.

Da der ideale Operationsverstärker **eine ideale Stromquellen-Charakteristik am Ausgang** hat, hat der zusätzlich durch den Widerstand *R* fliessende Strom keinen Einfluss auf die in Aufgabe 1 berechnete Kennlinie!

Aufgabe 3

In dieser Aufgabenstellung hat sich ein Überlegungsfehler eingeschlichen: Aufgrund der Asymmetrie von positiver und negativer Versorgungsspannung des Operationsverstärkers ergibt sich kein symmetrisches Rechtecksignal am Ausgang. Dadurch wird die Aufgabe unnötigerweise komplizierter.

Die Musterlösung zeigt beide Varianten auf: die erste, welche eigentlich für diese Übung gedacht war und auch vorbesprochen wurde sowie die effektiv richtige Lösung, welche sich durch die Asymmetrie ergeben würde.

Das Assistententeam entschuldigt sich für mögliche Unannehmlichkeiten.

Weil der Ladestrom i_c des Kondensators von der Spannungsdifferenz u_a - u_N über dem Widerstand abhängt, kann der zeitlich nichtlineare Verlauf der Spannung u_N nur durch Lösen der entsprechenden Differentialgleichung bestimmt werden.

Zunächst soll $u_N(t)$ im Intervall [0, t_1] berechnet werden, wobei zum Zeitpunkt t = 0 u_N den Schwellwert $u_{N,ein}$ erreicht und demnach auf U_{B+} springt. Im besagten Intervall wird der Kondensator geladen und erreicht bei $t = t_1$ den Schwellwert $u_{N,aus}$. **Abb. 3** verdeutlicht die Spannungsverhältnisse im Rückführpfad zu den Zeitpunkten $t = 0_+$ und Zeit $t = t_{1-}$.

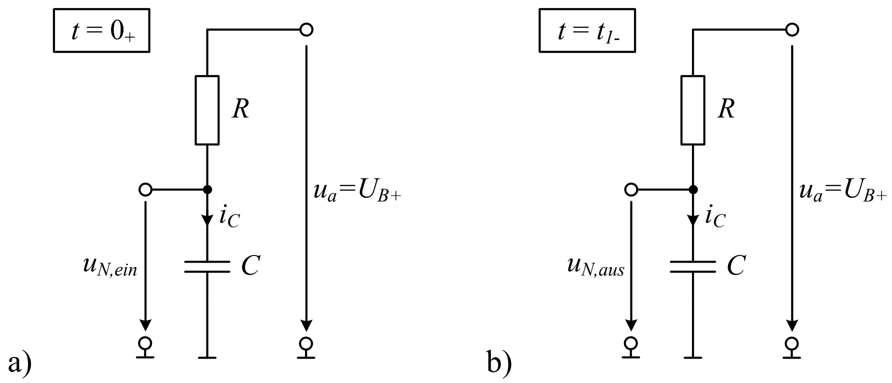

Abb. 3: Spannungsverhältnisse im Rückführpfad (a) zur Zeit $t = 0_+$ und (b) zur Zeit $t = t_{1-}$.

Es gilt:

$$i_C = C \cdot \frac{du_C}{dt} = C \cdot \frac{du_N}{dt} \quad \text{und} \quad i_C = \frac{U_{B+} - u_N}{R}$$

So folgt die gesuchte Differentialgleichung zu:

$$\frac{1}{U_{B+} - u_N} \cdot du_N = \frac{1}{RC} \cdot dt$$

Diese Differentialgleichung lässt sich direkt oder durch eine Substitution $U_{B+} - u_N =: u_x$ (du_x / du_N = -1) lösen. Diese Substitution führt auf:

$$-\frac{du_x}{u_x} = \frac{1}{RC} \cdot dt$$

Die substituierte Differentialgleichung hat die allgemeine Lösung

$$u_x(t) = A \cdot e^{-t/RC}$$

Durch Rücksubstitution

$$u_N(t) = U_{B+} - A \cdot e^{-t/RC}$$

und Einsetzen der Anfangsbedingung

$$u_N(t=0) = U_{B+} - A \triangleq U_{N,ein} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot \left(U_{B-}\right) = -3.75V$$

folgt für die Integrationskonstante

$$A = U_{B+} - U_{N,ein} = 18.75V$$

und damit für den zeitlichen Verlauf von u_N von $t = 0_+$ bis $t = t_{1-}$:

$$u_N(t) = 15V - 18.75V \cdot e^{-t/RC}$$

Die Spannung u_N nimmt demnach ausgehend vom Startwert $U_{N,ein}$ stetig zu und erreicht nach Zeit t_1 die Ausschaltschwelle $U_{N,aus}$. Die Zeit t_1 lässt sich somit aus der Bedingung

$$u_N(t = t_1) \triangleq U_{N,aus} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot U_{B+} = 11.25V$$

berechnen:

$$t_1 = -RC \cdot \ln\left(\frac{U_{N,aus} - 15V}{-18.75V}\right) = -RC \cdot \ln(0.2) = 1.61RC$$

Im Zeitpunkt t_1 wird also die Ausschaltschwelle $u_{N,aus}$ erreicht und u_a springt von U_{B+} nach U_{B-}. Der Kondensator wird nun entladen, bis nach der Zeit t_2 wiederum die Einschaltschwelle $u_{N,ein}$ erreicht wird und u_a erneut von U_{B-} nach U_{B+} springt.

Hier liegt nun der Überlegungsfehler: Das Entladen des Kondensators dauert aufgrund der unsymmetrischen Versorgungsspannung nicht gleich lang wie das Laden, also:

$$t_1 \neq t_2$$

Löst man die Differentialgleichung für das Entladen analog zur vorherigen Rechnung, erhält man folgenden zeitlichen Verlauf von u_N von $t = t_{1+}$ bis $t = t_1+t_{2-}$:

$$u_N(t) = -5V + 16.25V \cdot e^{-t/RC}$$

$$t_2 = -RC \cdot \ln\left(\frac{U_{N,ein} + 5V}{16.25V}\right) = -RC \cdot \ln\left(\frac{-3.75V + 5V}{16.25V}\right) = -RC \cdot \ln\left(1/13\right) = 2.56RC$$

Das Entladen dauert also in etwa eineinhalb mal länger als das Laden des Kondensators.

Variante 1 (vorbesprochene Lösung, für diese Aufgabenstellung eigentlich falsch):

Aufgrund der Symmetrie gilt:

$$t_1 = t_2 = \frac{1}{2f} = 25\mu s$$

Die Ausgangsspannung u_a ist also rechteckförmig und hat die (vorgegebene) Frequenz

$$f_a = \frac{1}{T} = \frac{1}{2t_1} = \frac{1}{-2 \cdot RC \cdot \ln(0.2)} = 20\text{kHz}$$

Damit kann nun die Grösse der Kapazität C berechnet werden:

$$C = \frac{1}{-2 \cdot R \cdot f_a \cdot \ln(0.2)} = 1.04\text{nF}$$

Variante 2 (für diese Aufgabenstellung korrekte Lösung):

Die Ausgangsspannung u_a ist rechteckförmig. Die Frequenz ergibt sich zu:

$$f_a = \frac{1}{T} = \frac{1}{t_1 + t_2} = \frac{1}{-RC \cdot \left(\ln(0.2) + \ln(1/13)\right)} = 20\text{kHz}$$

Damit kann nun die Grösse der Kapazität C berechnet werden:

$$C = \frac{-1}{R \cdot f_a \cdot \left(\ln(0.2) + \ln(1/13)\right)} = 0.80\text{nF}$$

t_1 und t_2 ergibt sich somit zu:

$$t_1 = -RC \cdot \ln(0.2) = 19\mu s$$

$$t_2 = -RC \cdot \ln(1/13) = 31\mu s$$

Aufgabe 4

Variante 1:

Mit den berechneten Werten und Funktionen lassen sich nun die Zeitverläufe $u_a(t)$ und $u_N(t)$ skizzieren (vgl. **Abb. 4**).

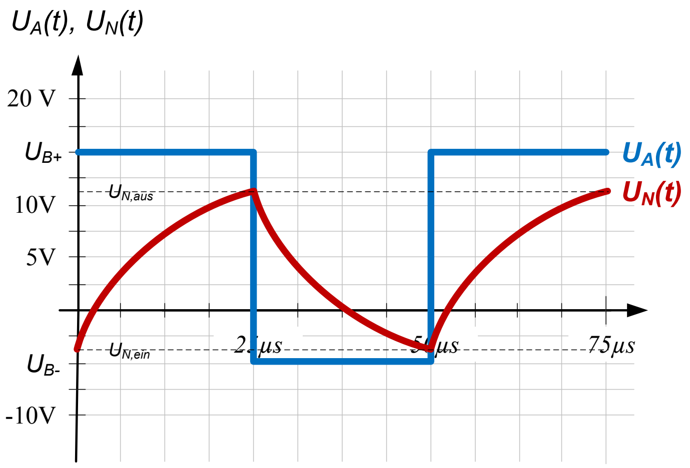

Abb. 4: Verlauf der Spannungen $u_A(t)$ und $u_N(t)$

Variante 2:

Mit den berechneten Werten und Funktionen lassen sich nun die Zeitverläufe $u_a(t)$ und $u_N(t)$ skizzieren (vgl. **Abb. 5**). Das Rechtecksignal ist **nicht** symmetrisch.

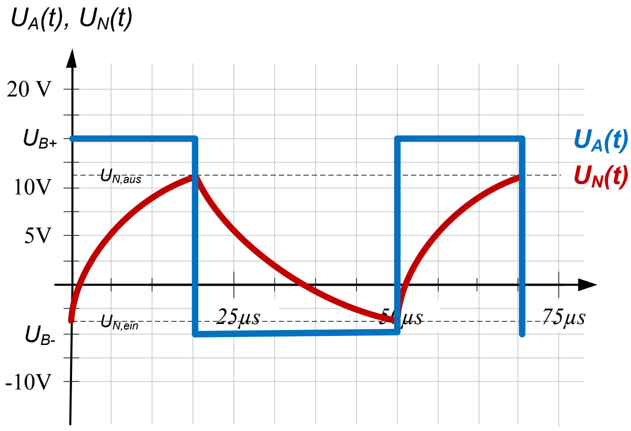

Abb. 5: Verlauf der Spannungen $u_A(t)$ und $u_N(t)$

Aufgabe 5

Durch die Diode wird der Widerstand des Rückführpfades und damit die (Ent)Ladezeitkonstante des Kondensators neu abhängig von der Richtung des Stromflusses. Im Intervall [0, t_1] fliesst der Strom vom Ausgang des Operationsverstärkers zum Kondensator durch beide Widerstände (da $u_a = U_{B+} > u_N$), wobei sich wegen $R//R = R/2$ der Kondensator schneller aufladet. Dadurch wird t_1 kleiner:

$$t_1 = -\frac{RC}{2} \cdot \ln(0.2) = 12.5\mu s \qquad t_1 = -\frac{RC}{2} \cdot \ln(0.2) = 9.5\mu s$$

Im Intervall [t_1, $t_1 + t_2$] wird der Kondensator wegen $u_a = U_{B-} < u_N$ entladen und der Strom fliesst, da die Diode sperrt, nur durch einen der beiden Widerstände. t_2 bleibt also gleich wie in Aufgabe 3:

$$t_2 = -RC \cdot \ln(0.2) = 25\mu s \qquad t_2 = -RC \cdot \ln(1/13) = 31\mu s$$

Die relative Verweildauer des Ausgangssignals auf U_{B+} ist das Verhältnis von der Verweildauer auf U_{B+} und der gesamten Periodendauer $t_1 + t_2$.

$$\frac{t_1}{t_1 + t_2} = \frac{R/2}{R + R/2} = \frac{1}{3} \qquad \frac{t_1}{t_1 + t_2} = \frac{R/2 * \ln(0.2)}{R/2 * \ln(0.2) + R * \ln(1/13)} \approx \frac{1}{4}$$

Variante 1:

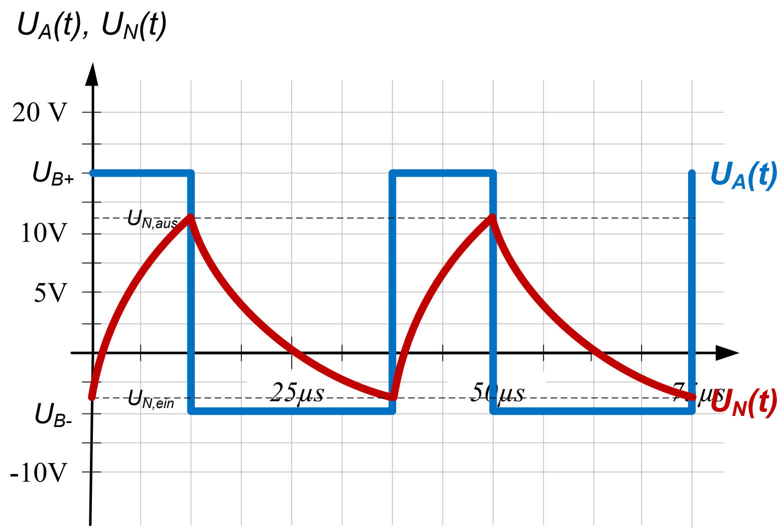

Abb. 6: Verlauf der Spannungen $u_a(t)$ und $u_N(t)$ beim modifizierten Rechteckgenerator.

Variante 2:

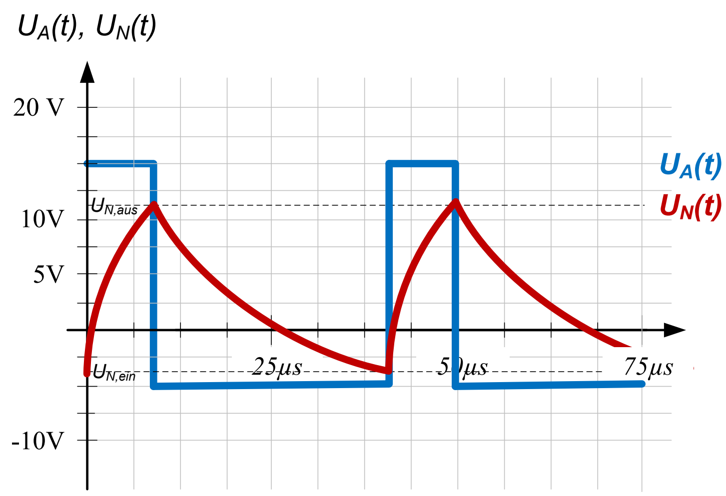

Abb. 7: Verlauf der Spannungen $u_a(t)$ und $u_N(t)$ beim modifizierten Rechteckgenerator.