Generator für eingeprägte Ströme

Aufgabe 1: Innenwiderstand

Zur Berechnung des Innenwiderstandes werden Spannungsquellen kurzgeschlossen und Stromquellen stellen eine Unterbrechung dar. **Abb. 2** zeigt die resultierende Schaltung aus Sicht der beiden Klemmen b_1 und b_2. Der Innenwiderstand $\underline{Z}_i$ stellt also eine Serieschaltung von zweimal L parallel C dar:

$$\underline{Z}_i = \frac{j\omega L / j\omega C}{j\omega L + 1/j\omega C} + \frac{j\omega L / j\omega C}{j\omega L + 1/j\omega C} = 2 \cdot \frac{j\omega L}{1-\omega^2 LC}$$

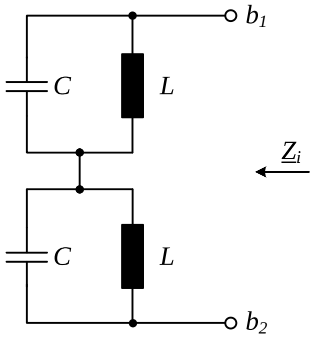

Abb. 1: Zur Berechnung des Innenwiderstandes $\underline{Z}_i$ aus Sicht der beiden Klemmen b_1 und b_2.

Alternativ kann der Innenwiderstand $\underline{Z}_i$ auch aus der Summe der beiden Innenwiderstände $\underline{Z}_{i,1}$ und $\underline{Z}_{i,2}$ der Ersatzspannungsquellen nach Abb. 2 d) berechnet werden:

$$\underline{Z}_i = \underline{Z}_{i1} + \underline{Z}_{i2}$$

Die Innenwiderstände der Ersatzquellen betragen dabei (L parallel C):

$$\underline{Z}_{i1} = \underline{Z}_{i2} = \frac{j\omega L / j\omega C}{j\omega L + 1/j\omega C} = \frac{j\omega L}{1-\omega^2 LC}$$

Aufgabe 1: Ersatz-Spannungsquelle

Die Schaltung zur Erzeugung eines eingeprägten Stroms (**Abb. 1 a)**) besteht aus zwei belasteten Spannungsteiler (Abb. 1 b)). Die Leerlaufspannung $\underline{U}_{V,L}$ (Last $\underline{Z}$ von den Klemmen abgetrennt) kann direkt mit der Spannungsteilerregel berechnet werden:

$$\underline{U}_{V,L} = \underline{U}_{b1,L} - \underline{U}_{b2,L} = \frac{1/j\omega C}{j\omega L + 1/j\omega C} \cdot \underline{U}_N - \frac{j\omega L}{j\omega L + 1/j\omega C} \cdot \underline{U}_N = \frac{1+\omega^2 LC}{1-\omega^2 LC} \cdot \underline{U}_N$$

Alternativ können beide Spannungsteiler je in eine Ersatzspannungsquelle $\underline{U}_{E1,2}$ mit Innenwiderstand $\underline{Z}_{i1,2}$ umgeformt werden (Abb. 1 d)). Die Grösse der Ersatzspannungsquellen entsprechen den Leerlaufspannungen an den Klemmen b_1 und b_2:

$$\underline{U}_{E1} = \underline{U}_{b1,L} = \frac{1/j\omega C}{j\omega L + 1/j\omega C} \cdot \underline{U}_N \text{ , bzw. } \underline{U}_{E2} = \underline{U}_{b2,L} = \frac{j\omega L}{j\omega L + 1/j\omega C} \cdot \underline{U}_N$$

Damit folgt für die Leerlaufspannung $\underline{U}_{V,L}$ an den Klemmen b_1 und b_2:

$$\underline{U}_{V,L} = \underline{U}_{b1,L} - \underline{U}_{b2,L} = \underline{U}_{E1} - \underline{U}_{E2} = \frac{1+\omega^2 LC}{1-\omega^2 LC} \cdot \underline{U}_N$$

Die Leerlaufspannung $\underline{U}_{V,L}$ entspricht der Ersatzspannungsquelle der weiter vereinfachten Schaltung nach Abb. 1 c). Die Spannung $\underline{U}_V$ ist also nicht konstant gleich $\underline{U}_{V,L}$, sondern aufgrund des Spannungsabfall über den Innenwiderständen lastabhängig!

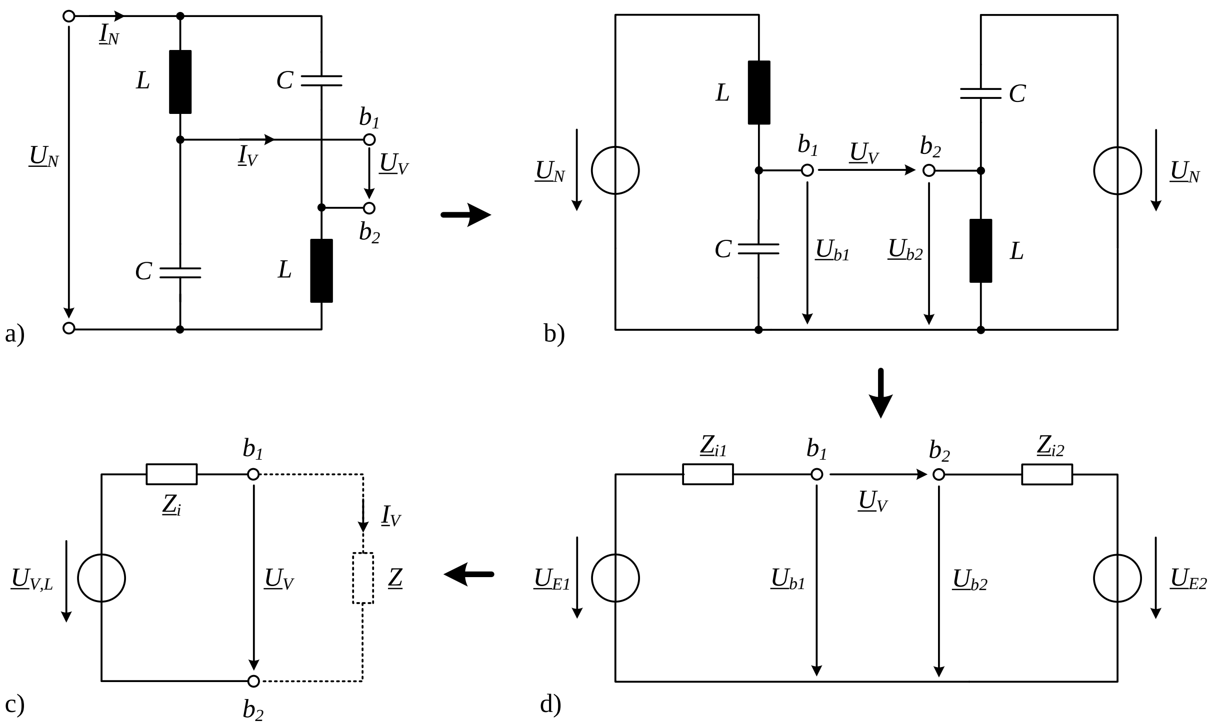

Abb. 1: Vorgehen bei der Transformation der Schaltung in ein äquivalente Ersatzschaltung.

Aufgabe 2

Der Laststrom $\underline{I}_V$ lässt sich mit dem Thévenin-Äquivalent viel einfacher berechnen:

$$\underline{I}_V = \frac{\underline{U}_{V,L}}{\underline{Z} + \underline{Z}_i}$$

$$\underline{I}_V = \frac{\frac{1+\omega^2 LC}{1-\omega^2 LC} \cdot \underline{U}_N}{\underline{Z} + \frac{2 \cdot j\omega L}{1-\omega^2 LC}} = \frac{1+\omega^2 LC}{2 \cdot j\omega L + \underline{Z}(1-\omega^2 LC)} \cdot \underline{U}_N$$

Aufgabe 3

Damit $\underline{I}_V$ unabhängig von $\underline{Z}$ wird, muss die Bedingung

$1-\omega^2 LC = 0$, also $\omega = \sqrt{1/LC}$

gelten. $\omega = \sqrt{1/LC}$ ist die sog. Resonanzfrequenz, bei welcher die Impedanzen $\underline{Z}_L$ und $\underline{Z}_C$ entgegengesetzt gleich zueinander sind:

$$\underline{Z}_L = j\omega L = j\cdot\sqrt{\frac{L}{C}}\text{ , bzw. }\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = -j\cdot\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Mit der Bedingung $\omega^2 = 1/(L\cdot C)$ folgt nun für den von $\underline{Z}$ unabhängigen Lastwechselstrom:

$$\underline{I}_V = \frac{2\cdot\underline{U}_N}{2\cdot j\omega L} = \frac{\underline{U}_N}{j\sqrt{L/C}} = -j\cdot\sqrt{\frac{C}{L}}\cdot\underline{U}_N$$

$\underline{I}_V$ hat die Frequenz $\omega = \sqrt{1/LC}$!

Aufgabe 4

Bei den Aufgaben 4 und 5 wird nicht mehr der Laststrom $\underline{I}_V$ betrachtet, sondern der Eingangsstrom $\underline{I}_N$. Werden die Klemmen b_1 und b_2 kurzgeschlossen, stellt die Schaltung bezüglich des Eingangsstroms eine Serieschaltung von zweimal L parallel C dar (vgl. **Abb. 3 a)**). Die Kurzschlussimpedanz $\underline{Z}_K$ folgt zu:

$$\underline{Z}_K = \frac{j\omega L/j\omega C}{j\omega L + 1/j\omega C} + \frac{j\omega L/j\omega C}{j\omega L + 1/j\omega C} = 2\cdot\frac{j\omega L}{1-\omega^2 LC}$$

Damit berechnet sich der Kurzschlussstrom $\underline{I}_{N,K}$ zu:

$$\underline{I}_{N,K} = \frac{\underline{U}_N}{\underline{Z}_K} = \frac{1-\omega^2 LC}{2\cdot j\omega L}\cdot\underline{U}_N$$

Mit der Bedingung $\omega^2 = 1/(L\cdot C)$ folgt $\underline{I}_{N,K} = 0\text{A}$!

Alternativ kann der Kurzschlussstrom $\underline{I}_{N,K}$ auch über die Knotengleichung $\underline{I}_{N,K} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$ berechnet werden. Mit

$$\underline{U}_L = \underline{U}_C = \frac{\underline{U}_N}{2}$$

folgt

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_N}{2\cdot j\omega L}\text{ , bzw. }\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_N}{2}\cdot j\omega C\text{ ,}$$

und damit wiederum

$$\underline{I}_{N,K} = \frac{1-\omega^2 LC}{2\cdot j\omega L}\cdot\underline{U}_N\ .$$

Wird $\omega = 1/\sqrt{LC}$ (Resonanzfrequenz) in die Gleichungen für $\underline{I}_1$ und $\underline{I}_2$ eingesetzt, folgt

$$\underline{I}_1 = -j \cdot \frac{\underline{U}_N}{2} \cdot \sqrt{\frac{C}{L}} \text{, bzw. } \underline{I}_2 = j \cdot \frac{\underline{U}_N}{2} \cdot \sqrt{\frac{C}{L}} \,.$$

$\underline{I}_1$ und $\underline{I}_2$ stehen senkrecht auf $\underline{U}_N$ und sind aufgrund der bei der Resonanzfrequenz gleichgrossen Impedanzen entgegengesetzt gleich! Der Eingangsstrom $\underline{I}_{N,K}$ wird damit Null. Die im System vorhandene Energie wird abwechslungsweise in der Kapazität oder in der Induktivität (verlustlos) gespeichert.

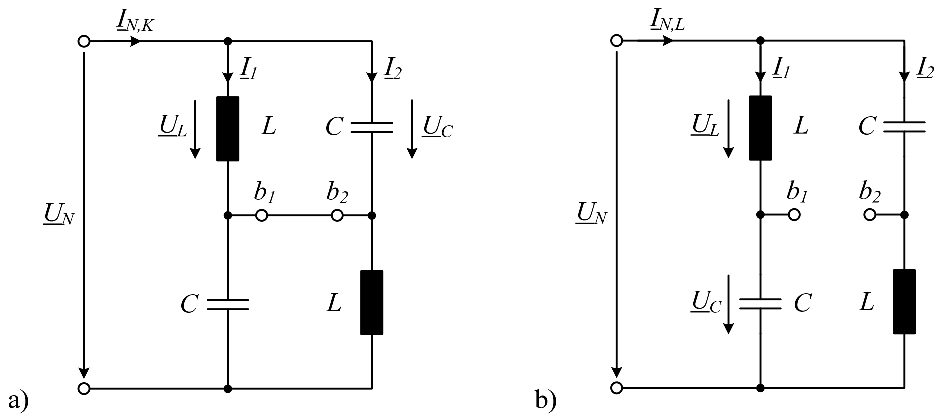

Abb. 3: Zur Berechnung des Eingangsstroms $\underline{I}_{N,K}$ bei a) kurzgeschlossenen und b) offenen Klemmen b_1 und b_2.

Aufgabe 5

Im Leerlauf (Klemmen b_1 und b_2 nicht verbunden) stellt die Schaltung bezüglich des Eingangsstroms eine Parallelschaltung von zweimal L in Serie mit C dar (vgl. Abb. 3 b)). Die Leerlaufimpedanz $\underline{Z}_L$ folgt zu:

$$\underline{Z}_L = \frac{\left(j\omega L + 1/j\omega C\right)^2}{2\left(j\omega L + 1/j\omega C\right)} = \frac{1-\omega^2 LC}{2 \cdot j\omega C}$$

Damit berechnet sich der Eingangsstrom $\underline{I}_{N,L}$ im Leerlauf zu:

$$\underline{I}_{N,L} = \frac{\underline{U}_N}{\underline{Z}_L} = \frac{2 \cdot j\omega C}{1-\omega^2 LC} \cdot \underline{U}_N$$

Mit der Bedingung $\omega^2 = 1/(L \cdot C)$ folgt $\underline{I}_{N,L} \rightarrow \infty$, die Bauteile werden also zerstört!

Alternativ kann hier auch nur die Impedanz $\underline{Z}_S$ der Serieschaltung von L und C betrachtet werden:

$$\underline{Z}_S = j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$

Bei der Resonanzfrequenz $\omega = 1/\sqrt{LC}$ wird

$$\underline{Z}_S = j\frac{L}{\sqrt{LC}} + \frac{1}{jC/\sqrt{LC}} = j \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} - j \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} = 0 \,.$$